Programme de colle 10

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous.

Systèmes linéaires, matrices

- ☐ Savoir échelonner puis résoudre un système linéaire. Connaître la condition sur la forme échelonnée d'un système carré pour qu'il admette une unique solution (vocabulaire : système de Cramer).
- ☐ Notations I_n, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notation $[A]_{i,j}$ pour le coefficient de la ligne i, colonne j de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille et tous leurs coefficients égaux.
- ☐ Matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, expression en fonction du coefficient d'indice (i, j) de $E_{k,l}$.
- ☐ Définition d'une combinaison linéaire de matrices. Savoir expliquer pourquoi toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- ☐ Savoir énoncer précisément à quel condition sur les tailles de deux matrices A, B peut-on parler du produit AB, et donner dans ce cas la définition du coefficient d'indice (i, j) de AB. (Question de cours : définition précise avec la formule pour $[AB]_{i,j}$ plus un exemple)
- ☐ Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a $A = B$ si, et seulement si, $(\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = BX)$ (Question de cours, démonstration exigible.).
- ☐ Propriétés de l'addition et la multiplication de matrices : on peut retenir que tout se passe comme attendu, sauf la commutativité (on n'a pas toujours $AB = BA$), et l'intégrité ($AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$).
- ☐ Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $AI_p = I_nA = A$.
- ☐ Transposée d'une matrice, savoir démontrer que ${}^t({}^tA) = A$ (Question de cours)
- ☐ Transposée d'une matrice, savoir démontrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ (Question de cours)
- ☐ Puissances de la matrice $J = (1)_{1\leq i,j\leq n}$.
- ☐ Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices (ne pas oublier l'hypothèse que les matrices commutent). (Question de cours).
- ☐ Définition d'une matrice symétrique/antisymétrique, triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, diagonale.
- ☐ Formule pour les puissances d'une matrice diagonale.
- ☐ Pour P un polynôme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définition de $P(A)$.
- ☐ Définition d'une matrice inversible et de son inverse (s'il existe). Soit A une matrice carré de taille n, les propositions suivantes sont équivalentes :

  1. Il existe une matrice B carrée de taille n, pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = Y \Leftrightarrow X = BY$.
  2. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.

  Si une de ces propositions équivalentes est vérifiée, on dit que A est inversible, et la matrice B est unique : c'est la matrice notée A^{-1}. (Question de cours : définition plus preuve de 1 implique 2 ou bien de 2 implique 1 au choix pour le colleur)
- ☐ Propriété : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

  1. A est la matrice des coefficients d'un système de Cramer ;
  2. L'application du pivot de Gauss sur A donne une matrice échelonnée dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls (il y a n pivots) ;
  3. Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AX = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

  (Question de cours : énoncer ces conditions, et expliquer pourquoi cela est vrai - pas de démonstration complète exigible, juste la compréhension des systèmes de Cramer...)
- ☐ Opérations sur les matrices inversibles, notamment (si A, B carrées de même taille inversibles), $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$, $(A^{-1})^{-1} = A$, ${}^tA$ inversible d'inverse ${}^t(A^{-1})$ (et savoir prouver que A inversible si, et seulement si, ${}^tA$ est inversible). (Question de cours : énoncer ces propriétés, et démonstration d'une des 4 au choix du colleur)
- ☐ Savoir déterminer l'inverse d'une matrice par le 1er ou le 2e point de la définition, mais aussi savoir (si on veut juste déterminer l'inversibilité) juste échelonner la matrice pour voir si on obtient une diagonale de pivots (pas besoin de résoudre le système).

- ☐ Notion de polynôme annulateur, avoir compris comment il permet de déterminer les puissances d'une matrice (division euclidienne) et un inverse de la matrice dans certains cas.
- ☐ Condition nécessaire et suffisante sur une matrice diagonale pour qu'elle soit inversible, et formule pour l'inverse dans ce cas (Question de cours)
- ☐ Critère pour exclure rapidement l'inversibilité : colonne/ligne s'écrivant comme combinaison linéaire des autres colonnes/-lignes
- ☐ Condition nécessaire et suffisante sur une matrice de taille 2 pour qu'elle soit inversible, et formule pour l'inverse dans ce cas (Question de cours)

Dérivation

- ☐ Définition de la dérivabilité en un point x_0 de l'ensemble de définition et, dans ce cas, valeur de la dérivée comme limite du taux d'accroissement.
- ☐ Équation de la tangente en x_0 (cas d'existence).
- ☐ f dérivable en x_0 implique f continue en x_0.
- ☐ Définition dérivabilité à gauche et à droite en x_0 et lien avec la dérivabilité en x_0. (Question de cours)
- ☐ Savoir montrer qu'une fonction est dérivable en un point x_0 grâce à l'étude de la limite du taux d'accroissement pour des cas concrets simples.
- ☐ Dérivées et ensemble de dérivabilité des fonctions usuelles à connaître.
- ☐ Opérations et dérivées : somme, produit, quotient, composée.
- ☐ Savoir utiliser ces opérations pour déterminer un ensemble sur lequel une fonction est dérivable.
- ☐ Conditions de dérivabilité de la réciproque d'une bijection strictement monotone et formule dans ce cas. (Question de cours, et démonstration partielle : on admet f^{-1} dérivable, il faut retrouver la formule.)
- ☐ Application à la fonction arctan et dérivée de l'arctangente. (Question de cours, et démonstration)
- ☐ Conditions sur un extremum local garantissant que c'est un point critique (Question de cours, et démonstration).
- ☐ Théorème de Rolle (Question de cours, et démonstration)
- ☐ Égalité des accroissements (Question de cours, démonstration à l'aide du théorème de Rolle)
- ☐ Inégalité des accroissements finis (Question de cours , démonstration en utilisant l'égalité des accroissements finis)
- ☐ Pour toute fonction f dérivable sur un intervalle I, f est croissante sur I ssi f' est positive sur I (Question de cours : montrer l'une des deux implications au choix du colleur)
- ☐ Si f est dérivable sur un intervalle I et que f' est strictement positive sauf en un nombre fini de points sur I alors f est strictement croissante sur I (propriété analogue dans le cas strictement décroissant).
- ☐ Notion de dérivée n-ième
- ☐ Définition de fonction de classe $\mathcal{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et de $\mathcal{C}^\infty$.
- ☐ Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$: somme, produit, quotient et composition (ce qui permet souvent de montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$).
- ☐ Formule de Leibniz.
- ☐ Théorème de la limite de la dérivée, exemples simples d'applications : $x \mapsto x\sin(x)$ et $x \mapsto x\sqrt{x}$ en 0. (Question de cours : l'énoncer précisément, plus un exemple au choix du colleur)