Programme 11

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

TOUT LE PROGRAMME SUR LA DERIVATION, ET :

Espaces vectoriels

- ☐ Avoir compris qu'un espace vectoriel est un ensemble dont on peut additionner les éléments et dont on peut multiplier les éléments par des réels (scalaires) : stabilité par combinaison linéaire.
- ☐ Savoir appliquer les règles de calculs dans les espaces vectoriels.
- ☐ Connaître les espaces vectoriels classiques et les opérations associées : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, suites réelles, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- ☐ Savoir montrer qu'un vecteur est (ou n'est pas) combinaison linéaire d'autres vecteurs.
  Savoir le faire sur des exemples concrets simples (de votre invention) dans chacun des espaces vectoriels de référence.

Notion de sous-espace vectoriel

- ☐ Définition d'un sous-espace vectoriel et caractérisation : 3 points à vérifier.
- ☐ Notion de sous-espaces vectoriels triviaux.
- ☐ Exemples classiques : $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}^n(D,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(D,\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques, ensemble des matrices diagonales.
- ☐ Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? De $\mathbb{R}^3$?
- ☐ L'intersection de 2 sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E. (Démonstration exigible)
  ⚠Ce n'est pas le cas de l'union $F\cup G$ (sauf si l'un est inclus dans l'autre). Donner un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$.

Sous-espace vectoriel engendré

- ☐ Définition avec des mots (ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires de la famille) et définition précise de **l'ensemble** $\text{Vect}(u_1,\cdots,u_p)$.
- ☐ Pour $u_1,\dots,u_p\in E$, $\text{Vect}(u_1,\cdots,u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E. (Démonstration exigible)
- ☐ Soit F un sous-espace vectoriel de E et $u_1,\dots,u_p\in E$. $\text{Vect}(u_1,\cdots,u_p)\subset F$ équivaut à $u_1,\cdots,u_p\in F$ (Démonstration exigible)
- ☐ Penser, pour montrer par exemple que $\text{Vect}(u_1,\cdots,u_p)=\text{Vect}(v_1,\cdots,v_q)$, à utiliser la propriété précédente pour chaque inclusion.
- ☐ Deux idées pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E :
  - ⋆ Ou bien vérifier les trois points de la caractérisation
  - ⋆ Ou bien déterminer une famille $(u_1,,\cdots,u_p)$ telle que $F=\text{Vect}(u_1,\cdots,u_p)$.

Familles génératrices

- ☐ Définition de famille génératrice d'un espace vectoriel F (⚠toujours préciser de quel espace vectoriel).
- ☐ Savoir traduire la définition en mots, $(u_1,\dots,u_p)$ est une famille génératrice de F signifie : "L'ensemble des combinaisons linéaires de $(u_1,\dots,u_p)$ est égal à F", ou bien "$u_1,\dots,u_p\in F$ et tout vecteur de F est une combinaison linéaire des vecteurs u_1,...,u_p".
  ⚠Dans la deuxième formulation, "$u_1,\dots,u_p\in F$" entraîne $\text{Vect}(u_1,\dots,u_p)\subset F$, et "tout vecteur de F est une combinaison linéaire des vecteurs u_1,...,u_p" entraîne $F\subset\text{Vect}(u_1,\dots,u_p)$, ce sont ces deux conditions qui garantissent $F=\text{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ (ce qui est la première formulation).
- ☐ Connaître les modifications possibles sur la famille $(u_1,\cdots,u_p)$ ne modifiant pas $\text{Vect}(u_1,\cdots,u_p)$
- ☐ Exemples classiques de familles génératrices pour $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$.

Familles libres et liées

- ☐ Définition avec des mots (au moins un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs de la famille) et définition précise (avec des quantificateurs) d'une famille libre.

- ☐ Toute famille contenant le vecteur nul est liée (pourquoi ?). Toute famille d'un seul vecteur est libre si et seulement ci ce vecteur est non nul.
- ☐ (Notion détaillée en EC1B, pas encore en EC1A) : Toute famille de deux vecteurs non colinéaires est libre (⚠ne fonctionne que pour des familles de 2 vecteurs).
- ☐ Intérêt d'une famille libre : "identification coefficients à coefficients" à savoir expliquer et montrer. (Démonstration exigible en EC1B)
- ☐ (En EC1B) Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est libre. Connaître les modifications possibles sur la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ conservant son caractère libre (suppression d'un vecteur, ajout de vecteurs avec certaines propriétés à connaître etc.)
- ☐ (En EC1B) Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est liée. Connaître les modifications possibles sur la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ conservant son caractère liée (ajout de vecteur etc.)
- ☐ (En EC1B) Exemple classique : famille de polynômes échelonnée en degrés.
- ☐ Les exemples classiques de familles génératrices pour $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont libres.

Notes aux colleurs

Le chapitre sur les espaces vectoriels n'est pas terminé (nous n'avons pas encore vu la notion de base) et aucun exercice n'a été fait en TD. Les exercices sur les espaces vectoriels, si vous en donnez, seront des applications directes du cours. Merci.