

Compétences - Calcul dans \mathbb{R}

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), ou à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous pour me poser vos questions ou me faire part de vos préoccupations.

1 Rédaction

- ☐ Savoir introduire ses variables en français : comprendre l'emploi des mots "on pose", "il existe", et "soit".
- ☐ Ne plus jamais utiliser des variables non introduites.
- ☐ Mettre en avant les articulations logiques : si vous supposez que n est pair, dites "on suppose n pair". Si vous dites juste " n est pair" l'examineur se dira "non, pas forcément", et va barrer.
- ☐ Avoir compris comment rédiger $\Delta \Rightarrow \odot$: on suppose Δ , on prouve \odot .
- ☐ Avoir compris comment rédiger $\Delta \Leftrightarrow \odot$: ou bien on raisonne par équivalences, $\Delta \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \odot$, ou bien on prouve $\Delta \Leftarrow \odot$ puis $\Delta \Rightarrow \odot$.
- ☐ Savoir montrer, par exemple, que " $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ " est FAUX, en donnant un contre-exemple.
- ☐ Syntaxe \forall [variable] \in [ensemble].
- ☐ Syntaxe \exists [variable] \in [ensemble].
- ☐ Avoir compris que les quantificateurs ci-dessus n'introduisent les variables que localement, elles ne peuvent pas être utilisées dans la suite de la rédaction.
- ☐ Comprendre ce que \Leftrightarrow veut dire, que si vous devez prouver par exemple que $x = 2$, et que votre rédaction se termine par $x + 4 = 6 \Leftrightarrow x = 2$, vous n'avez pas prouvé $x = 2$, vous avez montré que SI $x + 4 = 6$ ALORS $x = 2$ et réciproquement.
- ☐ Comprendre le problème dans " $f(x)$ est croissante".

2 Calcul dans \mathbb{R}

- ☐ Savoir raisonner par équivalence pour une inégalité : multiplication, division, addition, soustraction d'une constante des deux côtés (attention, parfois il faut faire attention au signe, à la non nullité...)
- ☐ Avoir compris que $f(a) = f(b)$ n'implique PAS $a = b$ en général (donner un contre-exemple), mais que cela est vrai si on suppose de plus que f est strictement monotone sur un intervalle I et $a, b \in I$.
- ☐ Définitions de f (strictement) (dé)croissante sur un intervalle I .
- ☐ Avoir compris que $f(a) < f(b)$ n'implique PAS $a < b$ en général (donner un contre-exemple), mais que cela est vrai si on suppose de plus que f est strictement croissante sur un intervalle I et $a, b \in I$.
- ☐ Définition de la valeur absolue.
- ☐ Prouver que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$, $|-x| = |x|$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
- ☐ Pour $h \geq 0$, $|x| = h \Leftrightarrow \dots$ (compléter, et pourquoi est-ce faux si $h \leq 0$?)
- ☐ Soit $x \in \mathbb{R}$. Si on trouve un entier \odot tel que $\odot \leq x < \odot + 1$ (à compléter), alors on a, par définition, que $\odot = \lfloor x \rfloor$ (et c'est le seul entier vérifiant cela, sinon la définition serait problématique!). ([Question de cours : définition de la partie entière et tracer sa représentation graphique](#))
- ☐ Savoir où la fonction partie entière est dérivable (indice : pas tout \mathbb{R}).
- ☐ Définitions et propriétés de l'exponentielle et du logarithme.
- ☐ Comprendre la définition de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ quand α est un entier positif, quand α est un entier strictement négatif, et quand α n'est pas un entier. Comprendre pourquoi le domaine de définition est respectivement \mathbb{R} , \mathbb{R}^* , et \mathbb{R}_+^* . ([Question de cours](#))
- ☐ Définition d'un intervalle de \mathbb{R} .
- ☐ Soit A une partie de \mathbb{R} . Définitions précises de : "être un majorant de A ", que A "admette une borne supérieure", que A "admette un plus grand élément ; idem avec minorant, borne inférieure, plus petit élément (notations max, sup, min, inf). ([Question de cours](#))
- ☐ Définition d'une partie A de \mathbb{R} , et savoir démontrer l'équivalence entre (A bornée) et $(\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |x| \leq K)$. ([Question de cours](#))
- ☐ Théorème (admis) : que peut-on dire de toute partie de \mathbb{R} non vide et majorée?
- ☐ Forme canonique des polynômes du second degré, en déduire leurs racines et les factoriser.

- ☐ Relations coefficients-racines pour les polynômes du second degré.

3 1bis - Trigonométrie

- ☐ Définitions des fonctions \sin , \cos , \tan .
- ☐ Relation fondamentale (Pythagore).
- ☐ Encadrements de \sin , \cos .
- ☐ Connaître par cœur $\sin(\pi/6)$, $\sin(\pi/4)$, $\sin(\pi/3)$, en déduire immédiatement les cosinus et les tangentes des trois angles.
- ☐ Les périodicités, la parité/imparité, les relations de symétrie par rapport aux abscisses aux ordonnées au centre et à la droite $y = x$.
- ☐ Connaître par cœur $\cos(2a)$ (trois formes) et $\sin(2a)$
- ☐ Connaître par cœur $\cos(a + b)$, $\sin(a + b)$, en déduire immédiatement $\cos(a - b)$, $\sin(a - b)$.
- ☐ Savoir résoudre pour α fixé les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) = \cos(\alpha)$, $\sin(x) = \sin(\alpha)$, $\tan(x) = \tan(\alpha)$.
- ☐ Dérivées, et en particulier taux d'accroissements en zéro de \sin , \cos , \tan .

4 1ter - Sommes et produits

- ☐ Notations, avec A une partie finie de \mathbb{N} , $\sum_{k=0}^n a_k$, $\sum_{k \in A} a_k$, $\prod_{k=0}^n a_k$, $\prod_{k \in A} a_k$.
- ☐ Expliquer ce qu'est une variable muette.
- ☐ Être capable de passer la notation somme à une notation en extension (c'est-à-dire avec trois petits points), et vice versa.
- ☐ Savoir calculer (et connaître) $\sum_{k=i}^j a$, $\sum_{k=i}^j a^k$, $\sum_{k=0}^n k$, $\sum_{k=0}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n k^3$, $\prod_{k=i}^j a$. (Question de cours : valeur de ces sommes, sans démonstration pour l'instant)
- ☐ Maîtriser la sommation / le produit par paquets, c'est à dire couper en plusieurs parties la somme ou le produit. Cas particuliers fréquents : premier terme / les autres termes ; m premiers termes / les autres termes ; les termes d'indice pair / les termes d'indice impair.
- ☐ Translation d'indice, changement d'indice par symétrie : dans les deux cas, savoir poser un nouvel indice, voir quel intervalle d'entiers il décrit, puis réécrire la somme avec le nouvel indice.
- ☐ Somme télescopique : énoncer et démontrer le résultat $\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$. (Question de cours)
- ☐ Sommes doubles : sur les rectangles, sur les triangles.
- ☐ Définitions de $n!$, $\binom{n}{k}$, et symétrie des coefficients binomiaux, à savoir démontrer. (Question de cours)
- ☐ Formule de Pascal et sa démonstration, ainsi que son application avec le triangle de Pascal. (Question de cours)
- ☐ Formule du capitaine, aussi appelée formule du pion, à savoir démontrer. (Question de cours)
- ☐ Formule du binôme de Newton (à savoir démontrer). (Question de cours : l'énoncer, mais sans la démonstration pour l'instant)
- ☐ Identité de Bernoulli (à savoir démontrer). (Question de cours : l'énoncer, mais sans la démonstration pour l'instant)