

Programme de colle 5

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous.

Suites (chapitre complet)

Généralités

- ☐ Notation : faire la différence entre le terme de rang n : u_n et la suite notée u , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (u_n) .
- ☐ Dans le cas d'une définition par récurrence savoir faire un changement d'indice dans la formule de récurrence et savoir pour quels n est valable votre formule (par exemple, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, alors pour tout $n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}$).
- ☐ Expression "à partir d'un certain rang", par exemple "à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ signifie : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq v_n$.
- ☐ Définition de suite majorée, minorée et bornée.
- ☐ Propriété : (u_n) est bornée si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A$ ([démonstration exigible](#)).
- ☐ Définition de suites (strictement) croissantes, décroissantes, monotones, constantes, stationnaires.

Limites

• Suites convergentes

- ☐ Définition de suite convergente : savoir énoncer précisément et représenter la définition sur un dessin.
- ☐ Unicité de la limite dans le cas convergent (autrement dit, si on a $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$, alors $\ell = \ell'$). ([Question de cours : démonstration exigible](#))
- ☐ $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \Leftrightarrow |u_n - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- ☐ Toute suite réelle convergente est bornée.

• Suites divergentes

- ☐ Définition de suite divergente, de suite divergente vers $+\infty$ et de suite divergente vers $-\infty$.
- ☐ Connaître des exemples de suites divergentes qui ne tendent pas vers $+\infty$ ou $-\infty$. Savoir en dessiner.
- ☐ Connaître des exemples de suites divergentes vers $+\infty$ qui ne sont pas croissantes, même à partir d'un certain rang. Savoir en dessiner.

☐ Limites des suites usuelles.

• Opérations sur les limites

- ☐ Connaître et comprendre les règles d'addition. Bien repérer les formes indéterminées.
- ☐ Connaître et comprendre les règles de multiplication. Bien repérer les formes indéterminées.
- ☐ Connaître et comprendre les règles du quotient. Bien repérer les formes indéterminées.
Bien comprendre les différents cas quand la suite au dénominateur tend vers 0.

★ Composition de limites

- ☐ Connaître le théorème (appelé aussi propriété) de composition des limites. ([Question de cours, l'énoncer précisément](#))
- ☐ Savoir démontrer, à l'aide de la composition des limites, que si f est continue en un réel ℓ , et que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$, alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\ell)$. ([Question de cours](#))

- ☐ Limites de type taux de variation à connaître : si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, limites de $\frac{\sin(u_n)}{u_n}, \frac{\ln(1+u_n)}{u_n}, \frac{\sqrt{1+u_n}-1}{u_n}, \frac{e^{u_n}-1}{u_n}$.
([Question de cours : calculer une de ces limites, tout bien justifier à l'aide de la définition de la dérivée comme la limite du taux de variation et la composition des limites.](#))

• Limites et inégalités

- ☐ Théorème de convergence monotone.
- ☐ Si (u_n) converge vers $l > 0$ alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$. ([Question de cours : démonstration exigible](#))
- ☐ La propriété se généralise : si (u_n) converge vers $m < \ell < M$ alors à partir d'un certain rang $m < u_n < M$. A savoir démontrer. Idée : appliquer la propriété précédente aux suites $(u_n - m)$ et $(M - u_n)$...
- ☐ Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang alors $\ell \leq \ell'$. ([Question de cours : démonstration exigible](#))

Attention 1 Ne pas inventer le théorème (faux) suivant :

~~Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang alors $\ell < \ell'$.~~ Savoir pourquoi c'est faux (quel contre-exemple?). En revanche, si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' et que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang alors $u_n \leq v_n$

à partir d'un certain rang et donc $\ell \leq \ell'$.

Attention 2 pour appliquer le théorème il faut que les suites u et v soient convergentes...

- ☐ Théorème de comparaison ([Question de cours : démonstration exigible](#))
- ☐ Théorème des gendarmes.
- ☐ Connaître ses croissances comparées.
- Suites adjacentes : définition, théorème si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite ([Question de cours : démonstration exigible](#))
- Décalage d'indice : Si la suite (u_n) admet une limite, alors la suite (u_{n+1}) admet aussi cette même limite... (et réciproquement, si (u_{n+1}) admet une limite, (u_n) admet aussi cette même limite).
- Théorème : Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ si et seulement si $u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ et $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.

Suites particulières

- Suites arithmétiques
 - ☐ Formule par récurrence. Attention la raison ne doit pas dépendre de n ...
 - ☐ Formule explicite en fonction de n (savoir la déterminer quand le premier terme de la suite n'est pas de rang 0).
 - ☐ Formule de la somme
- Suites géométriques
 - ☐ Formule par récurrence. Attention la raison ne doit pas dépendre de n ...
 - ☐ Formule explicite en fonction de n (savoir la déterminer quand le premier terme de la suite n'est pas de rang 0).
 - ☐ Formule de la somme
- Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$. **La méthode générale d'étude n'est pas à connaître et le fameux théorème du point fixe n'est pas au programme et ne doit pas être cité.**
 - ☐ Savoir tracer graphiquement les termes successifs de (u_n) à l'aide du tracé de $y = x$ et de la courbe représentative de f .
 - ☐ Avoir bien compris et avoir vu sur des exemples que ce n'est pas parce que f est croissante que (u_n) l'est ou parce que f est décroissante que (u_n) l'est.
 - ☐ Dans le cas où la suite converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, et que f est continue en ℓ (bien connaître l'hypothèse! pourquoi est-ce essentiel?), savoir prouver que $\ell = f(\ell)$.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (il existe deux constantes a, b , pour tous $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Théorème (admis) donnant l'expression explicite de u_n dans le cas où le polynôme caractéristique a au moins une solution.
- Suites arithmético-géométriques : maîtriser la méthode pour déterminer l'expression explicite.

Polynômes (début du chapitre)

- Degré d'une somme de deux polynômes, d'un produit de deux polynômes, d'une composée de deux polynômes. ([Question de cours, et prouver la formule pour le degré de la somme.](#))
- Formule donnant les coefficients d'un produit de deux polynômes. ([Question de cours, sans démonstration exigible, mais savoir au moins le vérifier sur un cas concret avec de petits degrés.](#))
- Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, savoir démontrer que $P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1} X^k$, puis en déduire plus généralement la formule pour $P^{(i)}$ pour tout $i \leq n$. En déduire $P^{(i)}(0)$. ([Question de cours](#))
- Énoncer précisément les formules de Taylor (celle en 0, et celle plus générale en $\alpha \in \mathbb{R}$). ([Question de cours, sans démonstration](#))

Note pour les colleurs : Ne pas encore donner d'exercices sur les polynômes, seulement des questions de cours.