Programme de colle 7

Voici les compétences à **assimiler**. Ne cochez pas avant d'être sûr d'être à l'aise avec la notion. N'hésitez pas à en parler à vos camarades (il est très bénéfique d'échanger sur le cours, de s'expliquer mutuellement les notions), à préparer des questions à poser en classe, ou à me demander un rendez-vous.

Polynômes

Opérations sur les polynômes

- ☐ Convention d'écriture : X^2+1, par exemple, désigne la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2+1$.
- ☐ Degré de λP en fonction de λ et du degré de P.
- ☐ Degré d'une somme de deux polynômes, d'un produit de deux polynômes, d'une composée de deux polynômes. (Question de cours, et prouver la formule pour le degré de la somme.)
- ☐ Formule donnant les coefficients d'un produit de deux polynômes. (Question de cours, sans démonstration exigible, mais savoir au moins le vérifier sur un cas concret avec de petits degrés.)
- ☐ Comprendre que l'on n'a pas la propriété d'intégrité pour toutes les fonctions, mais que l'on a la propriété d'intégrité pour les polynômes.
- ☐ Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, savoir démontrer que $P'=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k$, puis en déduire plus généralement la formule pour $P^{(i)}$ pour tout $i \leq n$. En déduire $P^{(i)}(0)$. (Question de cours)
- ☐ Énoncer précisément les formules de Taylor (celle en 0, et celle plus générale en $\alpha \in \mathbb{R}$). (Question de cours, sans démonstration)
- ☐ Formule de Leibniz.

Divisibilité, division euclidienne

- ☐ Définition de B divise A, propriété : si A non nul et que B divise A, alors, $\deg(B) \leq \deg(A)$ (Question de cours en EC1A avec démonstration exigible)
- ☐ Définition du reste et du quotient de la division euclidienne de A par $B \neq 0$. (Question de cours)
- ☐ Savoir poser et effectuer à la main la division euclidienne.
- ☐ Méthode pour trouver le reste R en évaluant la relation $A = BQ + R$ en des racines de B.

Racines

- ☐ $X-\alpha$ divise P si et seulement si $P(\alpha)=0$ (Question de cours, démonstration exigible)
- ☐ Si $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ sont des racines de P deux à deux distinctes, alors $(X-\alpha_1)\times\cdots\times(X-\alpha_r)$ divise P. Conséquence : si P est non nul, le nombre de racines de P est inférieur ou égal à $\deg(P)$.
- ☐ Conséquence : si un polynôme P admet une infinité de racines, alors $P=0$.
- ☐ Trois définitions équivalentes, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, de "α est racine de P de multiplicité m" : i) $(X-\alpha)^m$ divise P mais $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P ; ii) il existe un polynôme Q tel que $P=(X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha)\neq 0$; iii) $P(\alpha)=\cdots=P^{(m-1)}(\alpha)=0$ et $P^{(m)}(\alpha)\neq 0$. (En EC1B, l'équivalence avec iii) est vu comme une propriété). (Question de cours, donner précisément ces trois conditions équivalentes, sans démonstration)
- ☐ Si $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ sont des racines de P deux à deux distinctes de multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_r$, $(X-\alpha_1)^{m_1}\times\cdots\times(X-\alpha_r)^{m_r}$ divise P (admis). Conséquence : si P est non nul, le nombre de racines de P comptées avec multiplicités est inférieur ou égal à $\deg(P)$. (Question de cours, démonstration exigible de la conséquence, en se servant de la factorisation admise).
- ☐ Savoir donner des exemples où il n'y a pas égalité.
- ☐ Relations coefficients-racines pour les polynômes de degré 2 (Question de cours, avec démonstration exigible).

Limites

Dans cette partie, on considère I un intervalle, $x_0 \in I$, et f définie sur I sauf éventuellement en x_0, c'est-à-dire : le domaine de définition, noté D, de f, est soit I, soit $I \setminus \{x_0\}$.

Définitions

- ☐ Notion, pour une propriété portant sur la fonction f, d'être vraie "au voisinage de x_0", ou "au voisinage de $+\infty$" ou "au voisinage de $-\infty$" (Démontrer proprement, pour un exemple simple concret, qu'une fonction satisfait une propriété "au voisinage de..." pourra constituer une question de cours.).
- ☐ Soient $a, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, définitions de : f admet L pour limite en a. (Cela donne 9 définitions suivant a, L, à chaque fois l'élève devra pouvoir donner la définition avec des mots, avec un dessin, et avec des quantificateurs).
- ☐ Soit $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, définition de : f admet L pour limite à gauche en x_0 (condition : x_0 n'est pas l'extrémité gauche de D). Idem à droite. (Cela donne 6 définitions suivant L (et à gauche / à droite), à chaque fois l'élève devra pouvoir donner la définition avec des mots, avec un dessin, et avec des quantificateurs).
- ☐ Savoir que s'il y a une limite en a, elle est unique, on peut donc dans ce cas parler de LA limite en a de f.

Limites de fonctions usuelles

- ☐ Savoir déterminer les asymptotes horizontales, verticales, et de la forme $y = ax + b$.
- ☐ Les limites des fonctions usuelles (x^n, $\frac{1}{x}$, $\tan(x)$, e^x, $\ln(x)$, x^r ($r \in \mathbb{R}^*$) aux points "intéressants".

Opérations sur les limites

- ☐ Limites d'une somme, d'un produit, de l'inverse, d'un quotient.
- ☐ Savoir énoncer précisément et expliquer la propriété sur la limite d'une composée de fonctions (quand f admet b pour limite en a, et que g admet c pour limite en b, que dire de $g \circ f$?) (Question de cours avoir énoncer précisément ce résultat).
- ☐ Savoir énoncer précisément et expliquer la propriété sur la limite de $f(u_n)$ quand (u_n) admet pour limite a et f admet b pour limite en a (Question de cours avoir énoncer précisément ce résultat).
- ☐ Conséquences : 2 façons (avec les suites) de prouver qu'une fonction f n'a PAS de limite en a (deux suites qui convergent vers a mais leurs images n'ont pas la même limite, ou bien une suite qui converge vers a mais avec les images qui divergent).
- ☐ Croissances comparées : Quand x tend vers $+\infty$, $(\ln x)^\alpha \ll x^\beta \ll e^{\gamma x}$, et $\lim_{x \to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$ (pour tous α, β, γ dans $\mathbb{R}_+^*$).
- ☐ Savoir reconnaître un taux d'accroissement (d'une fonction de référence) pour donner une limite.

Théorèmes fondamentaux sur les limites

- ☐ Si une fonction admet une limite finie en a, elle est bornée au voisinage de a. Si cette limite est strictement positive, la fonction est strictement positive au voisinage de a.
- ☐ Savoir "passer une inégalité large à la limite" (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat).
- ☐ Théorème des gendarmes (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat).
- ☐ Théorème de comparaison (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat).
- ☐ Théorème de la limite monotone (Question de cours : savoir énoncer précisément ce résultat).

Continuité

Généralités

- ☐ Notion de continuité en x_0 d'une fonction f : x_0 est dans l'ensemble de définition de f, et f admet $f(x_0)$ comme limite en x_0 (Question de cours : donner la définition avec des mots puis avec des quantificateurs).
- ☐ Notion de continuité à gauche, à droite en un point (Question de cours : donner la définition avec des mots puis avec des quantificateurs).
- ☐ Notion de continuité sur un intervalle : f est dite continue sur un intervalle I si I est inclus dans l'ensemble de définition de f et que pour tout $x_0 \in I$, f est continue en x_0 (Question de cours : donner la définition avec des mots puis avec des quantificateurs).
- ☐ Équivalence, lorsque x_0 n'est pas à une extrémité de l'ensemble de définition, entre la continuité en x_0 et la continuité à gauche et à droite en x_0. Application pour démontrer la continuité ou la discontinuité en un point.
- ☐ Continuité des fonctions de référence sur leurs ensembles de définition (à l'exception de la fonction partie entière), la somme, le produit de fonctions continues sont continues. Si f est continue sur I et que g est continue sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est bien définie et continue sur I.

- ☐ Condition d'existence d'un prolongement continu d'une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$. Dans le cas où il y a existence, il y a unicité du prolongement continu.

Le théorème des valeurs intermédiaires et ses conséquences

- ☐ Théorème des valeurs intermédiaires (Question de cours : l'énoncer précisément, et l'illustrer par un exemple).
- ☐ L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (Question de cours : le prouver, à partir du théorème des valeurs intermédiaires).
- ☐ Savoir déterminer $f(I)$ dans des cas concrets. On pourra utiliser sans démonstration que si f est continue sur l'intervalle $]a,b[$ (avec a,b finis ou infinis), que f admet pour limite l_a en a et l_b en b, alors $]l_a, l_b[$ (ou $]l_b, l_a[$) est inclus dans $f(I)$.
- ☐ L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Autrement dit, si f est continue sur un segment, alors f est bornée sur ce segment et atteint ses bornes. (Question de cours : l'énoncer précisément).
- ☐ Notations $\max_{x\in[a,b]} f(x)$, $\min_{x\in[a,b]} f(x)$ (attention aux conditions d'existence).
- ☐ Théorème de la bijection strictement monotone continue. (Question de cours : l'énoncer précisément).